Matematyczne metody grafiki komputerowej

Cel wykładu: przedstawienie podstawowych narzędzi matematycznych stosowanych w grafice komputerowej do opisu i modelowania krzywych oraz powierzchni oraz algorytmów interpolacji i aproksymacji krzywych i powierzchni.

Wymagania: - Analiza numeryczna, Metody Numeryczne dla Matematyków, Podstawy Geometrii Różniczkowej, Wstęp do Grafiki Komputerowej (zalecany).

Program Wykładu: wstęp, krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni, wielomiany i funkcje sklejalne (spline), wielomiany Bèziera, blossoming, pochodna krzywej Bèziera, obniżanie stopnia krzywej, krzywe jednorodne i wymierne, pochodne krzywych wymiernych, reprezentacja stożkowych, rzutowanie i rysowanie krzywych, twierdzenie Menelaosa i zasadnicze twierdzenie geometrii rzutowej, iloczyn tensorowy, płaty powierzchni jako iloczyny tensorowe, pochodne cząstkowe – podział i łączenie, wymierne prostokątne płaty Bèziera, ray traceing, trójkątne płaty Bèziera, funkcje B–sklejane, własności funkcji B-sklejalnych, wstawianie węzłów, blossoming dla funkcji sklejanych, NURBS, powierzchnie sklejane.

Zalecane podręczniki i materiały uzupełniające:

- **P. Dierckx,** *Currve and Surface Fitting with Splines*, Clarendon Press, Oxford 1993;
- **J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes,** *Wprowadzenie go grafiki komputerowej*, WNT, Warszawa 1994;
- **M. Jankowski,** *Elementy grafiki komputerowej*, WNT, Warszawa 1990;
- **Theo Pavlidis**, *Grafika i przetwarzanie obrazów*, WNT, Warszawa 1987;
- **P. Kiciak**, Podstawy Modelowania Krzywych i powierzchni, WNT, Warszawa 2000;
- **P. Koprowski**, *Okruchy geometrii komputerowej*, unix.math2.us.edu.pl/~perry/gk/okruchy.pdf

Tytułem wstępu. Proponuję wszystkim moim słuchaczom zaznajomić się z „czajniczkiem Newella" (Newell's teapot), prawdopodobnie najbardziej znaną ikoną grafiki komputerowej. Można zależć w Google ponad 17.000 stron jemu poświęconym. Rysunek tu zamieszczony pochodzi z drugiego końca świata

http://www.cs.auckland.ac.nz/~jli023/opengl.htm

Tam też można się nim trochę pobawić. Np. tu dodano mu jeszcze kubeczki i łyżeczki. Inne fajne obrazki tego typu (ale bardziej matematyczne) można zobaczyć np. w książeczce Doroty Kowalczyk - „*Mathematica wersja 2.2 i grafika dla studentów i uczniów*", LYNX – SFT, 1996.

Modelowanie takiego czajniczka wymaga bowiem opisania jego kształtu w postaci zbioru elementów gładkiej powierzchni (płatów). Tego typu problemy – generowania gładkich powierzchni, lub krzywych występuje w wielu zastosowaniach grafiki komputerowej, zwłaszcza w problemach związanych z modelowaniem świata rzeczywistego.

Konieczność reprezentowania krzywych czy powierzchni pojawia się z grubsza w dwóch przypadkach:

- **modelowanie istniejących obiektów** (góra, twarz itp.);
- **modelowanie obiektu, który jeszcze nie istnieje** (projektowanie).

W pierwszym przypadku, matematyczny opis obiektu może nie istnieć lub być tak skomplikowany, że wyklucza to użycie komputera o skończonej pamięci. W tym przypadku na ogół aproksymujemy nasz obiekt przy pomocy kształtów mających stosunkowo proste opisy matematyczne: fragmenty płaszczyzn, kul itp. Aproksymacja powoduje, że nasz obiekt po „zmatematyzowaniu" niewiele się różni od obiektu rzeczywistego.

W drugim przypadku, gdy modelowany obiekt nie istnieje, użytkownik a ogół tworzy obiekt interaktywnie w procesie modelowania. Co więcej, na ogół ważniejsze jest sterowanie modelowaniem, niż faktyczny matematyczny opis obiektu – a raczej jego modelu. Ponadto, niejednokrotnie, w tym przypadku zachodzi potrzeba uwzględnienia pewnego dyskretnego zbioru punktów, otrzymanego podczas analizy walorów technicznych, estetycznych itp. To naturalnie narzuca problem interpolacji tych punktów przy pomocy klas krzywych, czy powierzchni.

W obu przypadkach zagadnieniem krytycznym jest wybór postaci funkcji matematycznych użytych w rozwiązywaniu naszych problemów. Matematyk najchętniej użyłby wielomianów, podczas gdy mamy olbrzymią dowolność w wyborze. Jest to konsekwencja następującego Twierdzenia Weierstrassa – Stone'a:

TWIERDZENIE. (Weierstass – Stone) Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa, oraz niech A będzie rodziną funkcji ciągłych $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathsf{R}$ taką, że

(1) dla każdych różnych x, $y \in \mathrm{X}$ istnieje $f \in \mathsf{A}$ taka, że $f(x) \neq f(y)$, oraz

(2) dla każdego $x \in \mathrm{X}$ istnieje $f \in \mathsf{A}$ taka, że $f(x) \neq 0$.

Wtedy algebra funkcji **A**, generowana w **C**(X) przez A jest gęsta w metryce *sup* (czyli zbieżności jednostajnej) w **C**(X).

RESZTA – będzie na wykładzie. Poza wykładem będę prowadzić ćwiczenia, które będą miały charakter seminaryjny i będą poświęcone głównie uzupełnianiem niezbędnych wiadomości z innych działów matematyki.