ZADANIA Z LOGIKI

LISTA nr 1

Dla danego zbioru A i każdego $n > 0$, określamy operacje trywialne n – zmiennych następująco: $E_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Dla danej algebry $\mathfrak{A} = \langle A, \{S_j\}_{j \in J}, \{a_k\}_{k \in K}\rangle$, rodziną działań algebraicznych $\mathcal{A}(\mathfrak{A})$ jest najmniejsza rodzina skończenie argumentowych funkcji z A w A zawierająca wszystkie funkcje trywialne, wszystkie funkcje $\{S_j\}_{j \in J}$ oraz zamknięta ze względu na składanie i podstawianie wyróżnionych elementów $\{a_k\}_{k \in K}$.

1. Niech $\mathfrak{A} = \langle A, +, -, \{\alpha\cdot\}_{\alpha \in K}\rangle$, gdzie K jest ciałem, będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Uwaga, $\alpha\cdot$ jest unarnym działaniem oznaczającym mnożenie przez $\alpha \in K$. Wykazać, że $\mathcal{A}(\mathfrak{A})$ jest zbiorem wszystkich kombinacji liniowych, tj. jeśli $F \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$ jest działaniem n zmiennych, to istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ takie, że $F(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, dla każdych $x_1, \dots, x_n \in A$.

2. Niech $\mathfrak{A} = \langle A, +, -, \mathbf{0}\rangle$ będzie dowolną grupą abelową, gdzie $-$ jest działaniem jednoargumentowym oznaczającym element przeciwny. Przyjmując standardowe oznaczenia

$$na = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n} \quad \text{oraz} \quad -na = \underbrace{(-a) + (-a) + \dots + (-a)}_{n}$$

dla dowolnego naturalnego n, udowodnić, że $\mathcal{A}(\mathfrak{A})$ jest zbiorem wszystkich całkowitych kombinacji liniowych. Czyli jeśli $F \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$ jest działaniem n zmiennych, to istnieją całkowite $m_1, \dots, m_n$ takie, że $F(x_1, \dots, x_n) = m_1 x_1 + \dots + m_n x_n$, dla każdych $x_1, \dots, x_n \in A$.

3. Niech $\mathfrak{A} = \langle A, \wedge, \vee\rangle$ będzie kratą, tj. algebrą, w której działania binarne $\wedge$ i $\vee$ spełniają następujące aksjomaty:

przemienność	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
łączność	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
idempotentność	$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$
dystrybutywność	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee b)$

Wykazać, że każda funkcja $F \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$ jest postaci $F(x_{1\,1}, \dots, x_{1\,n}, \dots, x_{m\,1}, \dots, x_{m\,n}) = \wedge_{i=1}^{m} \vee_{j=1}^{n} x_{i\,j}$.

4. Przy założeniach Zadania **3**. Wykazać, że każda funkcja $F \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$ jest postaci

$$F(x_{1\,1}, \dots, x_{1\,n}, \dots, x_{m\,1}, \dots, x_{m\,n}) = \vee_{i=1}^{m} \wedge_{j=1}^{n} x_{i\,j}.$$

5. Niech $\mathbf{2} = \langle\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ będzie algebrą, w której operacje $\wedge$, $\vee$ i $\neg$ są znanymi operacjami z rachunku zdań. Wykazać, że każda skończenie argumentowa funkcja $F : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$ jest elementem $\mathcal{A}(\mathbf{2})$.

6. Zbudować algebrę $\mathbf{3}$ o skończenie wielu działaniach taką, że każda skończenie argumentowa funkcja $F : \{0, 1, 2\}^n \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ jest elementem $\mathcal{A}(\mathbf{3})$. Jak to uogólnić?.

7. Niech A będzie zbiorem n elementowym. Obliczyć, ile jest algebr $\langle A, F\rangle$, gdzie F jest działaniem m argumentowym.

8. Dwie algebry $\mathfrak{A}_1 = \langle A, \{S_j^1\}_{j \in J}, \{a_k^1\}_{k \in K}\rangle$ i $\mathfrak{A}_2 = \langle A, \{S_j^2\}_{j \in J}, \{a_k^2\}_{k \in K}\rangle$ są algebraicznie równoważne jeśli mają te same działania algebraiczne, tj. $\mathcal{A}(\mathfrak{A}_1) = \mathcal{A}(\mathfrak{A}_1)$. Wykazać, że algebry $\langle\mathbb{Z}, +\rangle$ i $\langle\mathbb{Z}, -\rangle$, gdzie $+$ jest dodawaniem a $-$ jest odejmowaniem nie są algebraicznie równoważne.

9. Niech $\mathfrak{B} = \langle B, \wedge, \vee, {}^c, 0, 1\rangle$ będzie dowolną algebrą Boole'a. Niech $\mathfrak{B}_1 = \langle B, \wedge, {}^c\rangle$, $\mathfrak{B}_2 = \langle B, \wedge, {}^c\rangle$ oraz niech $\mathfrak{B}_3 = \langle B, \Delta, \wedge, 1\rangle$ będzie algebrą, w której $x \,\Delta\, y = (x \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c)$. Udowodnić, że $\mathcal{A}(\mathfrak{B}) = \mathcal{A}(\mathfrak{B}_1) = \mathcal{A}(\mathfrak{B}_2) = \mathcal{A}(\mathfrak{B}_3)$

10. Niech $\equiv$ będzie relacją na $\mathbb{Z}$ określoną przez $x \approx y$ iff x i y mają ten sam znak. Czy $\approx$ jest kongruencją w $\langle\mathbb{Z}, +\rangle$, a w $\langle\mathbb{Z}, \cdot\rangle$?

11. Rozważmy algebrę $\mathfrak{Z} = \langle\mathbb{Z}, +\rangle$ opisać podalgebry i obrazy homomorficzne $\mathfrak{Z}$.

12. Niech τ będzie typem podobieństwa zawierającym jedną operację $*$ arności 2. Niech $\mathcal{Z}(V)$ będzie zbiorem wszystkich zdań odpowiedniego rachunku zdań. Niech $\langle\mathbb{Z}, +\rangle$ będzie grupą liczb całkowitych oraz niech $2\mathbb{Z}$ będzie podgrupą liczb parzystych. Dla każdego $n > 0$ podać przykłady tautologii dla matrycy $\langle\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}\rangle$ o n zmiennych zdaniowych.

13. Podać przykład dwóch systemów relacyjnych $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ oraz homomorfizmu $\boldsymbol{h} : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B}$, który nie jest silnym homomorfizmem.

13. Dla ustalonego przeliczalnego typu podobieństwa i danej mocy $\mathfrak{m}$, zbudować system relacyjny $\mathfrak{A}$ tego typu mocy $\mathfrak{m}$ taki, że dla każdego systemu podobnego $\mathfrak{B}$ mocy $\leq \mathfrak{m}$ istnieje homomorfizm $\boldsymbol{h}$: $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. Czy homomorfizm $\boldsymbol{h}$ ten może być silny?

14. Czy rzutowanie "na oś" $\pi_i : \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_i$ jest silnym homomorfizmem.

15. Podać dwa przykłady:

– systemu, który nie ma maksymalnego podsystemu właściwego;

– systemu, który ma maksymalne podsystemy właściwe.

16. Czy każdy system ma podsystemy minimalne? Pokazać, że są systemy, które nie posiadają podsystemu najmniejszego.

17. Udowodnić, że każdy system A jest izomorficzny z podsystemem potęgi A^{I} czyli produktu $\prod_{i \in \mathrm{I}} \mathsf{A}_i$, gdzie $\mathsf{A}_i = \mathsf{A}$, którego uniwersum stanowią funkcje stałe (podsystem ten nazywamy też często ***przekątną*** potęgi A^{I}).

18. Kratą nazywamy system relacyjny $\mathfrak{A} = \langle A, \leq \rangle$, w którym $\leq$ jest relacją częściowego porządku na A oraz dla każdych dwóch elementów $a, b \in A$ istnieje ich kres dolny – oznaczany $a \wedge b$ oraz kres górny – oznaczany $a \vee b$. Udowodnić, że operacje te spełniają następujące równości:

przemienność	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
łączność	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
idempotentność	$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$

19. Podać przykład kraty, dla której nie zachodzi rozdzielność, tj. żadna z poniższych równości nie zachodzi:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee b)$$

Wykazać, że jeśli zachodzi jedna z nich, to zachodzi też druga.

20. Wykazać, że dla dowolnych elementów kraty a, b i c, jeśli $a \leq b$, to $a \wedge c \leq b \wedge c$ oraz $a \vee c \leq b \vee c$.

21. Element c jest pseudodopełnieniem a względem b iff c jest największym elementem kraty takim, że $a \wedge c \leq b$. Element ten będziemy oznaczać (o ile istnieje) przez $a * b$.

(a) Podać przykład kraty, w której są elementy, które nie posiadają pseudodopełnienia.

(b) Udowodnić, że dla każdego x mamy: $x \leq a * b$ iff $a \wedge x \leq b$.

22. Jeśli istnieje element $a * ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$, to $a \wedge (b \vee c) = ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$.

23. Jeśli istnieje $a * a$, to jest największym elementem w kracie.

24. Jeśli w kracie istnieje kres górny (dolny) rodziny elementów $\{a_t : t \in \mathrm{T}\}$, to oznaczamy go przez $\bigvee\{a_t : t \in \mathrm{T}\}$ ($\bigwedge\{a_t : t \in \mathrm{T}\}$ – odpowiednio). Wykazać, że jeśli istnieje $\bigvee\{a_t : t \in \mathrm{T}\}$, to dla dowolnego a istnieje też $\bigvee\{(a_t \vee a): t \in \mathrm{T}\}$ oraz $\bigvee\{(a_t \vee a) : t \in \mathrm{T}\} = a \vee \bigvee\{a_t : t \in \mathrm{T}\}$. Analogiczny rezultat zachodzi też dla odpowiednich kresów dolnych.

25. Wykazać, że jeśli istnieje $\bigvee\{a_t : t \in \mathrm{T}\}$ oraz jeśli $a * c$ istnieje dla każdego $c \in A$, to wówczas $a \wedge \bigvee\{a_t : t \in \mathrm{T}\}$ też istnieje oraz $a \wedge \bigvee\{a_t : t \in \mathrm{T}\} = \bigvee\{(a_t \wedge a) : t \in \mathrm{T}\}$. Sformułować i udowodnić analogiczny rezultat dla kresów dolnych.

26. Algebra Boole'a jest oczywiście kratą. Udowodnić, że jeśli istnieją kresy po prawej stronie, to istnieją też po lewej i zachodzą równości:

$$\bigvee\{a_t' : t \in \mathrm{T}\} = (\bigwedge\{a_t : t \in \mathrm{T}\})' \quad \text{oraz} \quad \bigwedge\{a_t' : t \in \mathrm{T}\} = (\bigvee\{a_t : t \in \mathrm{T}\})' .$$

27. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich skończonych sum przedziałów $[a, b)$ na prostej $\mathbb{R}$ oraz przedziałów $(-\infty, a)$ i $[a, \infty)$. Udowodnić, że $\mathcal{A}$ jest ciałem zbiorów, jest więc (ze zwykłymi działaniami mnogościowymi) algebrą Boole'a.